МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«**ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**»
(ТГПУ)

Утверждаю
___________ А.Н. Макаренко
декан ФМФ

«____» _______________2014 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Б.3.В.02 «АЛГЕБРА»

ТРУДОЁМКОСТЬ (В ЗАЧЁТНЫХ ЕДИНИЦАХ) 14

Направление подготовки **44.03.05 Педагогическое образование**

Профили: **Математика и информатика**

Степень (квалификация) выпускника **– бакалавр**

1. Цели изучения дисциплины:

Целью дисциплины является формирование научного представления об основных понятиях алгебры, развитие логического мышления и формирование первичных навыков научного исследования и самостоятельной работы. Этот курс является необходимым компонентом фундаментальной подготовки математиков.
Основной задачей изучения дисциплины является формирование у студентов теоретических знаний и практических навыков по алгебре.

2. Место учебной дисциплины в структуре основной образовательной программы.

Данная дисциплина относится к числу дисциплин профессионального цикла (вариативной части). Она является неотъемлемой частью профессионального математического образования студента. Для освоения данной дисциплины требуются математические знания, полученные в курсе средней школы.

Усвоение этой дисциплины необходимо для успешного освоения следующих учебных дисциплин: «Методика обучения математике», «Математический анализ», «Геометрия», «Теория вероятностей и математическая статистика», «Теория чисел», «Теория функций комплексного переменного», «Элементарная математика», «Математическая логика», «Теория множеств», «Преподавание в классах с углубленным изучением математики», «Решение олимпиадных задач по математике».

3. Требования к уровню освоения содержания дисциплины

Процесс изучения дисциплины «Алгебра» направлен на формирование следующих компетенций:

***Общекультурные компетенции* (*ОК*)**:

- владение культурой мышления, способностью к обобщению, анализу и восприятию информации (ОК 1);
- способность использовать знания о современной естественнонаучной картине мира в образовательной и профессиональной деятельности (ОК 4);
- способность логически верно выстраивать устную и письменную речь (ОК 6).

***Профессиональные компетенции* (*ПК*)**:

- осознание социальной значимости своей будущей профессии (ОПК 1);
- владение основными положениями классических разделов математической науки, базовыми идеями и методами математики, аксиоматическим методом (ПК 1);
- владение культурой математического мышления (ПК 2);
- способность понимать универсальный характер законов логики математических рассуждений, их применимость в различных областях человеческой деятельности (ПК 3);
- способность пользоваться построением математических моделей для решения практических задач (ПК 4);
- владение содержанием и методами элементарной математики, умение анализировать элементарную математику с точки зрения высшей математики (ПК 5).

В результате изучения дисциплины студент должен:

Знать:

- основные понятия теории множеств, теории бинарных отношений, теории отображений, теории комбинаторики;
- элементы теории чисел;
- основные алгебраические структуры;
- элементы теории матриц и определителей;
- элементы теории линейных пространств;

- элементы теории многочленов;
- формулировки и доказательства основных теорем курса «Алгебра».

Уметь:

- оперировать следующими понятиями: равенство множеств, подмножество, операции над множествами, бинарное отношение, отображение;
- решать комбинаторные задачи;
- выполнять матричные вычисления;
- вычислять определители;
- исследовать системы линейных уравнений.

Владеть:

- навыками самостоятельной работы и умением находить и перерабатывать дополнительную информацию в прикладных задачах;
- навыками доказательства методом математической индукции, методом от противного.

4. Общая трудоемкость дисциплины 14 зачётных единиц и виды учебной работы.

Вид учебной работы	Трудоемкость (в соответствии с учебным планом) (час)	Семестры			
	504	1	2	3	4
Аудиторные занятия	213 (в том числе в интеракт. – 44)	57 (в том числе в интеракт. – 12	63 (в том числе в интеракт. – 12)	57 (в том числе в интеракт. – 12)	36 (в том числе в интеракт.– 8)
Лекции	96	38	21	19	18
Практические занятия	117	19	42	38	18
Семинары					
Лабораторные работы					
Другие виды аудиторных работ					
Другие виды работы					
Самостоятельная работа	210	52	54	52	52
Курсовой проект (работа)					
Реферат					
Расчетно-графические работы					
Формы текущего контроля					
Формы промежуточной аттестации в соответствии с учебным планом	81	Зачет	Экзамен 27	Экзамен 27	Экзамен 27

5. Содержание учебной дисциплины

5.1. Разделы учебной дисциплины

№	Наименование раздела дисциплины	Аудиторные часы				Самост. работа
		Всего часов	Лекции	ПЗ	В т.ч. интерактивные формы обучения (не менее 20%)	
1-й семестр						
1.	Элементы математической логики и теории множеств	12	8	4	2	13
2.	Соответствия, отображения и отношения	9	6	3	2	13

3.	Матрицы и определители	20	16	4	4	13
4.	Основные алгебраические структуры	16	8	8	4	13
2-й семестр						
5.	Комплексные числа	30	10	20	6	27
6.	Исследование и решение систем линейных уравнений	33	11	22	6	27
3-й семестр						
7.	Кольцо многочленов над областью целостности	15	5	10	4	11
8.	Многочлены над полем	15	5	10	4	11
9.	Корни многочленов	14	5	9	4	15
10	Изоморфизмы линейных пространств. Линейные операторы	13	4	9		15
4-й семестр						
11	Основные числовые системы	28	12	16	4	30
12	Линейные алгебры над полем	8	6	2	4	22
ИТОГО:		213/ 6 з.ед.	96	117	44/ 24%	210

5.2. Содержание разделов дисциплины

1 семестр

Тема 1. Элементы математической логики и теории множеств.

Высказывания и логические операции над ними. Формулы и их классификация. Теорема об основных равносильностях формул алгебры высказываний. Предикаты и логические операции над ними. Необходимые и достаточные условия. Высказывания и теоремы стандартного вида. Метод математической индукции.
Понятие множества, способы задания множеств. Подмножества. Операции над множествами и их свойства. Булеан множества. Диаграммы Эйлера-Венна. Декартово произведение множеств.

Тема 2. Соответствия, отображения и отношения.

Бинарные соответствия между элементами двух множеств, их виды. Операции над соответствиями. Отображения, их виды. Обратное отображение, признак его существования. Бинарные отношения на множестве, их виды, признаки, примеры. Отношение порядка, его виды. Отношение эквивалентности на множестве, классы эквивалентности, фактор-множество. Связь между эквивалентностями и разбиениями.

Тема 3. Матрицы и определители.

Понятие матрицы, виды матриц. Сложение матриц, умножение матрицы на число. Произведение матриц. Транспонирование матриц. Свойства операций над матрицами. Значения многочленов в алгебре матриц.
Перестановки и подстановки, их четности. Операции над подстановками. Определители 2-го и 3-го порядков и правила их вычисления. Член определителя n-го порядка и его знак. Определение и свойства определителя n-го порядка. Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя по элементам строки или столбца. Приемы вычисления определителей. Теоремы замещения и аннулирования. Обратная матрица,

признак ее существования и способы вычисления. Решение матричных уравнений. Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера.

Тема 4. Основные алгебраические структуры.

Бинарные алгебраические операции, их записи, свойства, примеры. Нейтральные и симметрические элементы. Полугруппы и их примеры. Два определения группы и доказательство их равносильности. Примеры групп. Подгруппа, ее признак, примеры.
Кольцо, виды колец, их примеры. Простейшие свойства кольца. Делители нуля. Подкольцо, его признак, примеры.
Два определения поля и доказательство их равносильности. Примеры полей. Простейшие свойства поля. Подполе, его признак, примеры.
Определение линейного пространства, его свойства, примеры. Линейная зависимость и независимость систем векторов, их признаки.

2 семестр

Тема 5. Комплексные числа.

Изоморфизм полей. Расширение полей. Аксиоматическое определение поля комплексных чисел, признак поля комплексных чисел. Алгебраическая форма записи комплексных чисел и операции над комплексными числами, записанными в алгебраической форме. Тригонометрическая форма записи комплексных чисел и операции над комплексными числами, записанными в тригонометрической форме. Формулы Муавра и их применение. Извлечение корней n-степени из комплексных чисел. Группа корней n-степени из единицы. Первообразные корни. Построение моделей поля комплексных чисел.

Тема 6. Исследование и решение систем линейных уравнений.

Основная теорема о линейной зависимости системы векторов и следствие из нее. Ранг системы векторов и теорема о его свойствах. Строчечный, столбцевой и минорный ранги матрицы, их совпадение и способы вычисления. Решение основных вопросов, связанных с линейной зависимостью векторов. Критерий совместности системы линейных уравнений (с.л.у.). Признак определенности с.л.у. Теорема о бесконечности множества решений с.л.у. Этапы исследования и решения с.л.у. Пространство решений системы линейных однородных уравнений (с.л.о.у.)S_0. Фундаментальная система решений (ф.с.р.) системы S_0. Теорема о количестве векторов в ф.с.р. Связь между решениями неоднородной системы S и приведенной для нее системы S_0.

3 семестр

Тема 7. Кольцо многочленов над областью целостности.

Область целостности K, трнсцендентный (неизвестный) элемент x над K. Определение кольца многочленов K[x], его признак. Понятие степени многочлена, степень суммы и произведения многочленов. Существование кольца K[x]. Изоморфизм колец многочленов. Построение кольца многочленов K[$x_1, x_2, x_3, \dots x_n$] от n-неизвестных.

Тема 8. Многочлены над полем.

Теорема о свойствах делимости многочленов в кольце P[x] (P - поле). Теорема о делении с остатком. Теорема Безу, схема Горнера, разложение многочлена по степеням (x-c). Н.О.Д и Н.О.К многочленов. Алгоритм Евклида, линейное представление Н.О.Д. Взаимно простые многочлены и их свойства. Основные свойства неприводимых многочленов. Теорема о разложении многочлена на неприводимые множители и ее применение при вычислении Н.О.Д и Н.О.К многочленов. Неприводимые многочлены над полем Q.

Тема 9. Корни многочленов.

Корень многочлена и его признак. Кратность корня, два признака кратности корня. Теорема о числе корней многочлена. Алгебраическое и функциональное равенство многочленов. Алгебраическая замкнутость поля C. Неприводимые многочлены над полем C. Формулы Виета. Сопряженность корней многочлена с действительными коэффициентами. Неприводимые многочлены над полем R. Решение алгебраических уравнений 3-ей и 4-ой степеней в радикалах.

Тема 10. Изоморфизмы линейных пространств. Линейные операторы.

Определение и признак конечного базиса линейного пространства. Теорема о количестве векторов в базисах конечномерного пространства. Изоморфизм линейных пространств и его свойства. Теорема об изоморфном образе базиса. Признак изоморфизма конечномерных пространств. Координаты вектора в различных базисах.
Определения линейного оператора линейного пространства и его матрицы. Теорема о связи между матрицами линейного оператора в разных базисах. Характеристическое уравнение линейного оператора и его независимость от выбора базиса. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора. Теорема о собственных значениях линейного оператора. Ранг и дефект линейного оператора. Изоморфизм алгебры линейных операторов n-мерного пространства с алгеброй квадратных матриц порядка n (обзорно).

4 семестр

Тема 11. Основные числовые системы.

Аксиоматика Пеано натурального ряда. Независимость аксиом Пеано. Существование и единственность сложения и умножения натуральных чисел. Свойства сложения и умножения натуральных чисел. Полукольцо N натуральных чисел. Отношение порядка по величине в полукольце N и его свойства. Доказательства с использованием различных принципов полной математической индукции. Различные подходы к определению системы натуральных чисел.
Различные определения кольца Z целых чисел и доказательства их равносильности. Основные свойства кольца Z. Построение модели кольца Z. Деление с остатком в кольце Z. Представление целых чисел в десятичной системе.
Определение поля Q рациональных чисел и его признак. Построение модели поля Q. Упорядоченность поля Q и его свойства.
Аксиоматическое определение поля R действительных чисел по Дедекинду, Кантору, Вейерштрассу. Построение модели поля R.

Тема 12. Линейные алгебры над полем.

Определение, виды и примеры линейных алгебр над полем. Подалгебра, ее признак. Изоморфизм алгебр. Вложение поля P в алгебру V^P с единицей. Алгебра кватернионов. Теорема о существовании алгебры кватернионов. Действия над кватернионами в алгебраической форме. Алгебры с делениями конечного ранга над полями C и R. Теорема

Фробениуса (без доказательства). Алгебра октав. Обобщенная теорема Фробениуса (без доказательства).

5.3. Лабораторный практикум
Не предусмотрен

6. Учебно-методическое обеспечение дисциплины
6.1. Основная литература по дисциплине:

1. Высшая математика. Стандартные задачи с основами теории : учебное пособие / [В. Ю. Вдовин, Л. В. Михалева, В. М. Мухина и др.]. – СПб. : Лань, 2008. – 185 с.
2. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник для вузов / Д. В. Беклемишев. – Изд. 11-е, испр. – М.: Физматлит, 2007. – 159 с.

6.1. Дополнительная литература:

1. Ильин В.А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: Учебник для вузов / В. А. Ильин, Г. Д. Ким. – 2-е изд. – М.: Издательство МГУ, 2002. – 319 с.
2. Ким Г. Д. Алгебра и аналитическая геометрия: Теоремы и задачи: Учебное пособие / Г. Д. Ким, Л. В. Крицков; Под ред. В. А. Ильина. - М.: Зерцало. Т. 1. – 2003. – 430 с.
3. Купцов, А.И. Вводный курс математики: учебное пособие/А.И. Купцов. – Томск: Издательство ТГПУ, 2013. – 96 с.
4. Купцов, А.И. Индивидуальные задания для студентов 1 курса ФМФ: учебно-методическое пособие/А.И. Купцов. – Томск: Издательство ТГПУ, 2013. – 40 с.
5. Курош А.Г. Курс высшей алгебры :учебное пособие для вузов / А. Г. Курош. – Изд. 17-е, стереотип. –СПб. [и др.]: Лань, 2008. – 431 с.
6. Судоплатов С.В. Элементы дискретной математики / С.В. Судоплатов, Е.В. Овчинникова. – М.: ИНФРА – М, 2007. – 279 с.
7. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре: Учебное пособие для вузов / Д. К. Фаддеев. – 2-е изд., стер. –СПб.: Лань, 2002. – 415 с.

6.3. Средства обеспечения освоения дисциплины
1. Математический интернет-портал «Вся математика»: http://www.allmath.ru .
2. Интернет-тест по математике: http://www.mathtest.ru

6.4. Материально-техническое обеспечение дисциплины

№ п/п	Наименование раздела (темы) учебной дисциплины	Наименование материалов обучения, пакетов программного обеспечения	Наименование технических и аудиовизуальных средств, используемых с целью демонстрации материалов
1	1-5, 8-15 (см. таб. 5.1)	Табличный процессор (Microsoft Office Excel / OpenOffice.org Calc). Математические пакеты Mathcad и Mathematica.	Мультимедийный компьютерный класс, интерактивная доска, наличие локальной и глобальной сети.

7. Методические рекомендации по организации изучения дисциплины
7.1. Методические рекомендации преподавателю

Данный курс реализуется посредством чтения лекций, проведения практических занятий и консультаций. С целью выработки у студентов навыков самостоятельной работы с литературой, некоторые вопросы излагаются в обзорном порядке.

Предполагается, что отдельные выводы и доказательства будут проведены самостоятельно, с последующим отчетом на консультации.

7.2. Методические рекомендации для студентов

Студентам рекомендуется после лекции самостоятельно прорабатывать полученный материал, отмечая непонятные места. С вопросами нужно обращаться к преподавателю на консультации или следующей лекции. После каждого практического занятия студенты получают домашнее задание, обязательное для выполнения. Выполнение домашних и самостоятельных работ влияет на оценку на экзамене.

8. Формы текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся

8.1. Тематика рефератов.

Не предусмотрено.

8.2. Вопросы и задания для самостоятельной работы.

1 семестр

1. Что называется интерпретацией для формулы $F(x_1, x_2, ..., x_n)$? Определите, при каких интерпретациях выполнима формула $F(x, y, z) = (X \to \overline{Y}) \to (\overline{X \vee Y} \to \overline{Z})$.

2. Какой предикат называется логическим следствием другого? На множестве $A = 8,12,16,17,20,22$ заданы предикаты P(x) = «x делится на 2», Q(x) = «x делится на 4» , R(x)= «последняя цифра числа x четная». Укажите, какие из указанных предикатов связаны между собой отношением логического следствия.

3. На множестве $A = 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12$ заданы предикаты P(x) = «x - четное число», Q(x) = «x $\geq$ 6». Найдите множества истинности предикатов P(x), Q(x), $\overline{P(x)} \vee Q(x)$, $P(x) \to Q(x), Q(x) \to P(x)$.

4. Запишите в стандартном виде высказывания A, B, им обратные и противоположные высказывания и определите среди них теоремы, если

A= «целое число, делящееся на 3 и 4, делятся на 12»,

B = «целое число, делящееся на 6 и2, делится на 12».

5. Доказать равенство множеств $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

6. Методом математической индукции доказать формулу:

$$1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

7. Что называется соответствием между элементами множеств X и Y? Задайте три соответствия между множествами $X = a,b,c$ и $Y = 1,3,5$ так, чтобы одно из них было однозначным, но не всюду определенным.

8. Какие отображения называются инъективными, биективными? При каком условии существует указанного вида отображение n-элементного множества A в m-элементное множество B? Каково число биективных отображений?

9.На множестве $A = 1,2,3,4,5,6$ заданы отношения $\rho = (1,1),(1,6),(4,1),(6,3),(4,5),(3,4)$ и $\sigma = (3,4),(1,5),(4,3),(5,1)$. Найдите произведения $\sigma * \rho, \sigma^{-1} * \rho^{-1}, \rho^{-1} * \sigma^{-1}$ и сравните их отношениями равенства соответственно с $\rho * \sigma, (\rho * \sigma)^{-1}, (\sigma * \rho)^{-1}$.

10. На множестве $A = 2,4,5,6,7,8$ задайте наименьшее отношение эквивалентности ρ такое, что (4,2) $\in \rho$, (5,4) $\in \rho$ и постройте соответствующее фактор множество A/ρ .

11. На множестве $A = 3,4,5,6,7$ постройте его разбиение π ,содержащее три класса разбиения и по нему постройте соответствующее отношение эквивалентности ρ_π .

12. Вычислить A+B, A-B,A*B, B*A, $f(x)$, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 3\end{pmatrix}, f(x)=2x^2-3x-1$$

13. Вычислить определитель $\Delta=\begin{vmatrix}1 & -1 & 5 & 7\\ 3 & 5 & 1 & -1\\ -1 & -3 & 2 & 4\\ 7 & 9 & 7 & 1\end{vmatrix}$ путем разложения его по элементам 3-ей строки, 2-го столбца и путем понижения порядка.

14. Записать три члена определителя Δ из задания 13, входящих в него со знаком плюс и два – со знаком минус.

15. Решить матричное уравнение A*X*B=C, где $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 2 & -5 & 4\\ 3 & -7 & 5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$,

$$C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 4\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

16. По формулам Крамера решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases}2x_1+3x_2+5x_3+3x_4=2\\ x_1+2x_2+4x_3+3x_4=-1\\ 3x_1+3x_2+6x_3+5x_4=-1\\ 4x_1+x_2+2x_3+2x_4=2\end{cases}.$$

17. Доказать, что в конечной мультипликативной группе G выполняется условие $(\forall a\in G)(\exists n\in N)\ a^n=e$, где е- единица группы G.

18. Доказать, что если в кольце K выполняется условие $(\forall a\in K)a^2=a$, то K – коммутативное кольцо.

19. Доказать, что поле рациональных чисел Q является минимальным числовым полем.

2 семестр

1. Решить уравнение $(2-i)\cdot x+(5+6i)\cdot y=1-3i$ относительно действительных неизвестных.

2. Вычислить $i^{36}, i^{48}, i^{239}, -i^{10}, (-i)^{10}$.

3. Найти значение $f(x)=x^4+\dfrac{2+i}{x}-(-3+2i)$, при $x=1-2i$.

4. Выполнить указанные действия $\dfrac{(1+i)^8}{(1-i)^6}$.

5. Найти геометрическое место точек, изображающих комплексные числа z, для которых $|z-3i|<1$.

6. Записать в тригонометрической форме следующие комплексные числа $z_1=-1+i\sqrt{3}, z_2=i, z_3=1-i$.

7. Используя тригонометрическую форму комплексного числа, вычислить $\dfrac{(1-i\sqrt{3})(-\sqrt{3}+i)}{1+i}$.

8. Пользуясь формулой Муавра, вычислить $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$.

9. Выразить cos5x и sin5x через cosx и sinx.

10. Извлечь корень $\sqrt[3]{\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}}$.

11. Найти группу корней 4-ой степени из 1 и указать в ней все образующие элементы.

12. Найти ранг и все базисы системы векторов $u_1 = \ 4,2,-6,2\ $, $u_2 = \ 2,1,-3,1\ $, $u_3 = \ 6,3,-9,3\ $, $u_4 = \ 1,1,1,1\ $ пространства R^4.

13.Методом окаймляющих линоров найти ранг матрицы: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -5 & -7 \\ 4 & 7 & -5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

14. Исследовать на совместимость и найти методом Гаусса общее решение и два частных решения системы:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 11 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 6 \end{cases}.$$

15. Найти ф.с.р. и выразить через нее общее решение следующей с.л.о. уравнений:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 0 \\ 9x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 9x_5 = 0 \\ 8x_1 + 4x_2 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}.$$

3 семестр

1. Записать в стандартном виде сумму многочленов $f(x) = 2x^6 + 3x^5 - 8x^3 + 17x^2 - 35x - 18$ и $g(x) = -2x^6 + 5x^5 - 2x^4 + 10x^3 + 35x + 8$.

2. Записать в стандартном виде многочлен $h(x) = f(x)\cdot g(x)$, где $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 7$, $g(x) = 5x^3 + 4x - 5$.

3. Известны делимое $f(x) = 2x^4 + x^3 + 3x^2 + 1$, частное $q(x) = 2x^2 + 3x + 2$ и остаток $r(x) = -4x - 3$. Найти делитель g(x).

4. Разложить многочлен $f(x-3) = 2(x-3)^6 + 7(x-3)^5 + (x-3)^3 - 5(x-3)^2 + 4$ по степеням x.

5. Найти наибольший общий делитель (Н.О.Д) многочленов $f(x) = x^5 + 7x^4 + 20x^3 + 48x^2 + 52x + 57$ и $g(x) = x^4 + 8x^3 + 23x^2 + 34x + 39$.

6. Найти линейное представление Н.О.Д. многочленов $f(x) = 4x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 5x + 9$ и $g(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 4$.

7. Найти Н.О.Д. и Н.О.К. многочленов $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 2$, $g(x) = x^4 + x^3 + x^2 - x - 2$, $h(x) = x^3 - x^2 - 4$.

8. Найти кратность корня с=-2 многочлена $f(x)=x^5+6x^4+11x^3+2x^2-12x-8$ двумя способами.
9. Найти все корни многочлена $f(x)=x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8$ над полем С, если с=2- его корень.
10. Найти многочлен наименьшей степени с действительными коэффициентами, имеющий двойной корень i и простой корень $(-1-i)$.
11. Найти корни многочлена $f(x)=x^3+9x^2+18x+28$ с помощью формул Кардано.
12. Найти корни многочлена $f(x)=x^4-2x^3+4x^2+2x-5$ методом Феррари.
13. Вектор $x=2e_1+e_2+4e_3$ пространства V_3 записать в новом базисе $e_1'=e_1+2e_2+e_3$, $e_2'=2e_1+3e_2+2e_3$, $e_3'=3e_1+6e_2+2e_3$.
14. Найти образ $\varphi(y)$ вектора $y=3e_1-e_2-2e_3$, если оператор φ пространства V_3 определяется формулой $\varphi(x)=(x_1+2x_2+x_3)e_1+(2x_2+x_3)e_2+x_1e_3$, где $x=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3$.
15.Для линейного оператора φ, заданного в базисе $e_1\ e_2\ e_3$ пространства V_3 формулой $\varphi(x)=(x_1-18x_2+15x_3)e_1+(-x_1-22x_2+20x_3)e_2+(x_1-25x_2+22x_3)e_3$, где $x=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3$, найти его матрицу в новом базисе $e_1'=e_1+e_2+e_3$, $e_2'=e_1+2e_2+3e_3$, $e_3'=-3e_1-5e_2-6e_3$.
16. Для линейного оператора $\varphi(x)=(-x_2-x_3)e_1+(-x_1-x_3)e_2+(x_1-x_2)e_3$, где $x=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3$, найти его собственные значения и собственные векторы в базисе $e_1\ e_2\ e_3$ пространства V_3.
17. Найти ранги и дефекты линейных операторов $\varphi+\psi$, $\varphi*\psi$ в базисе $e_1\ e_2\ e_3$ пространства V_3, заданных формулами: $\varphi(x)=(x_1+2x_2+x_3)e_1+(2x_2-x_3)e_2+2x_1e_3$, $\psi(x)=(x_1+2x_2)e_1+(3x_2+x_3)e_2-x_1e_3$, где $x=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3$.
18. Пусть линейный оператор φ в базисе (а): $a_1=e_1+2e_2$, $a_2=2e_1+3e_2$ имеет матрицу $\begin{pmatrix}3&5\\4&3\end{pmatrix}$, а линейный оператор ψ в базисе (b): $b_1=3e_1+e_2$, $b_2=4e_1+2e_2$ имеет матрицу $\begin{pmatrix}4&6\\6&9\end{pmatrix}$. Найти матрицы операторов $\varphi+\psi$ и $\varphi*\psi$ в базисе (b).

4 Семестр

1. Докажите независимость системы аксиом Пеано.
2. Докажите, что каждое натуральное число, отличное от 1, имеет непосредственно предшествующее число.
3. Докажите единственность сложения натуральных чисел.
4. Сформулируйте и докажите основные свойства сложения натуральных чисел.
5. Сформулируйте и докажите основные свойства умножения натуральных чисел.
6. Докажите, что натуральные числа образуют коммутативное полукольцо с единицей и с сокращением как по сложению, так и по умножению.
7. Докажите, что полукольцо натуральных чисел является вполне упорядоченным полукольцом относительно сравнения по величине ()
8. Методом математической индукции по n доказать неравенство …
9. Сформулируйте два признака кольца целых чисел.
10. Постройте модель кольца целых чисел.
11. Докажите, что кольцо целых чисел является строго линейно упорядоченным кольцом.
12. Докажите, что изоморфный образ кольца целых чисел является кольцом целых чисел.

13. Дайте определение поля рациональных чисел и докажите его признак.
14. Постройте модель поля рациональных чисел.
15. Сформулируйте и докажите признак строго линейно упорядоченного поля.
16. Докажите, что поле рациональных чисел можно строго линейно упорядочить.
17. Докажите, что поле рациональных чисел – это наименьшее строго линейно упорядоченное поле.
18. Укажите схему доказательства равносильности трех определений системы действительных чисел.
19. Доказать, что если кватернион …., то все его координаты равны нулю ().
20. Для кватернионов … и …. Найти…

8.3. Вопросы для самопроверки.

1 семестр

1. Что понимается под высказыванием, предикатом? Установите, какие из следующих предложений являются высказываниями, предикатами, ни тем, ни другим; в случае высказываний, укажите их истинностные значения: а) 2+5=7; б) существует наибольшее натуральное число; в) в четырехугольнике противоположные стороны параллельны; г) 3>7; д) 2х-3; е) 3х<7 $(x \in R)$; ж) у некоторых четырехугольников противоположные стороны параллельны; з) $x^2 \geq 0$ $(x \in R)$.

2. Что называется формулой, подформулой в алгебре высказываний? Сколько подформул содержит формула $F(X,Y,Z) = \overline{X \vee Y} \to ((\overline{Z} \wedge Y) \to \overline{Z})$?

3. Дайте определение интерпретации для формулы алгебры высказываний, содержащей n высказывательных переменных. Сколько у неё будет интерпретаций, если а) n=4, б) n=6, n=10? Каково истинностное значение формулы $\overline{X} \to (Y \vee Z)$ при интерпретации (1,0,1)?

4. Какие формулы алгебры высказываний называются равносильными? Определите какие из указанных ниже пар формул равносильны: а) $X \to (Y \to Z)$ и $Y \to (X \to Z)$; б) $X \vee Y$ и $\overline{X} \to Y$; в) $\overline{X} \wedge Y$ и $X \vee \overline{Y}$.

5. Какие предикаты называются равносильными? Предикаты P(x) = «х- простое число» и Q(x) = «х- нечетное число» заданы сначала на множестве $A = \ 3,4,5,6,7\ $, затем на множестве $B = \ 2,3,4,5,6,7\ $. На каком из множеств А и В они равносильны?

6. Что называется множеством истинности предиката? У каких из заданных на множестве $A = \ 2,3,4,5,8,30\ $ предикатов P(x) = «х – простое число», Q(x) = «$(x-2)(x^2-7x+10)=0$», R(x) = «х делит число 30» множество $\ 2,3,5\ $ есть их множество истинности.

7. Что называется операциями приписывания кванторов всеобщности и существования к предикатам? Какое истинностное значение имеет высказывание $(\forall x \in Z)(|x| = x)$?

8. Что называется высказыванием стандартного вида, теоремой стандартного вида?

9. Укажите бинарные операции над множествами, которые не обладают свойством коммутативности.

10. Что называется булеаном множества? Может ли быть булеан пустым множеством?

11. Что называется объединением, пересечением и разностью множеств А и В? Найдите $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$ и $B \setminus A$, если а) $A = \ a,b,c,d,e\ $, $B = \ a,b,e,m,p\ $, б) $A = \ x \in Z \,|\, -5 \leq x \leq 7\ $, $B = \ x \in Z \,|\, 4 \leq x \leq 14\ $.

12. Сколько двузначных чисел можно записать с помощью цифр 2,0,3,7?

13. Что называется отображением множества А в множество?

14. Сколько всего существует отображений n-элементного множества А в m-элементное множество В?

15. Является ли отображение $f: R \to R^{+}$, где $f(x) = x^2 + 1$ $(x \in R)$, инъективным?, сюръективным?

16. Что называется областью определения, областью значения, графом и декартовым графиком бинарного отношения?

17. Какое бинарное отношение называется рефлексивным, симметричным? Сформулируйте их признаки и приведите примеры.

18. Является ли бинарное отношение $\rho = \ (2,3),(1,2),(1,1)\ $ на $A = \ 1,2,3\ $ транзитивным? Если нет, то дополните его до наименьшего транзитивного отношения ρ^t, содержащего ρ.

19. Какое бинарное отношение называется антисимметричным? Сформулируйте его признак, приведите примеры.

20. Что называется отношением порядка на множестве А? Будет ли отношение ρ, задаваемое предикатом делимости $x\rho y \Leftrightarrow x \vdots y\ "(\exists k \in A) x = k \cdot y"$ на А, если а) A=N?, б) A=Z?

21. Каким свойством должно удовлетворять бинарное отношение ρ на А, чтобы быть эквивалентностью на А?

22. Что называется классом эквивалентности ρ на А с представителем $a \in A$?

23. Какие из множеств $\ 4,3\ ,\ 1,2\ ,\ 1,2,3\ $ являются классами эквивалентности $\rho = \ (1,1),(2,1),(2,2),(3,3),(1,2),(4,4)\ $ на $A = \ 1,2,3,4\ $?

24. Что называется фактор-множеством множества А по эквивалентности ρ?

25. Для каких матриц определена операция умножения?

26. Какой знак имеет следующий член определителя 4-го порядка: $a_{21}a_{34}a_{12}a_{43}$?

27. Для каких матриц существует обратная?

28. Для каких систем линейных уравнений применимо правило Крамера?

29. Какие из арифметических действий (сложение, вычитание, умножение) являются бинарными алгебраическими операциями на следующих множествах : N, Z, $\ 1,0,-1\ $.

30. Какая группа называется циклической?

31. Во всяком ли кольце умножение сократимо?

32. Имеет ли поле рациональных чисел Q собственные подполя?

2 семестр

1. Что называется изоморфизмом полей?

2. В каком случае поле *P2* называется расширением поля *P1*?

3. Что называется алгебраической формой записи комплексного числа?

4. Когда равны комплексные числа, записанные в алгебраической форме?

5. Каково геометрическое изображение комплексного числа?

6. Что называется тригонометрической формой записи комплексного числа?

7. Когда равны комплексные числа, записанные в тригонометрической форме?

8. Какое комплексное число называется первообразным корнем n-степени из единицы?

9. Какова связь между корнями n-степени из единицы и из любого числа?

10. Что называется базисом и рангом систем векторов?

11. Что называется строчечным рангом матрицы?

12. Что называется столбцевым рангом матрицы?

13. Какие действия над строками матрицы называются элементарными преобразованиями её системы строк?

14. Какая матрица называется матрицей ступенчатого вида и чему равен её ранг?

15. Какие существуют способы нахождения ранга матрицы?

16. Какие с.л. уравнений называются равносильными?

17. Какая с.л. уравнений называется совместной и каков признак её совместности?

18. Что называется общим решением с.л. уравнений?

19. Какая совместная система называется определенной и каков признак её определенности?

20. Что называется фундаментальной системой решений (ф.с.р.) с.л. однородных уравнений S_0?

21. Когда для системы S_0 существует ф.с.р. и каково количество векторов в ф.с.р.?

22. Какова связь между решениями системы S и решениями приведенной для неё системы S_0?

3 семестр

1. Какое кольцо называется областью целостности?
2. Какой элемент называется трансцендентным над областью целостности?
3. Что называется стандартной формой записи многочлена?
4. Что называется старшим членом многочлена?
5. Что называется степенью многочлена?
6. Какие многочлены называются ассоциативными?
7. Что означает разделить один многочлен на другой с остатком?
8. Что называется Н.О.Д. и Н.О.К. многочленов?
9. Какие многочлены называются взаимнопростыми?
10. Какой многочлен называется неприводимым над полем P?
11. Что называется корнем многочлена? Кратностью корня?
12. Какое поле называется алгебраически замкнутым?
13. Какова степень неприводимых многочленов над полем C? Над полем R?
14. Какую степень имеют неприводимые многочлены над полем Q?
15. Что означает решить уравнение в радикалах?
16. Что называется конечным базисом линейного пространства?
17. Как связаны между собой размерности изоморфных линейных пространств?
18. Что называется матрицей линейного оператора?
19. Как связаны между собой матрицы линейного оператора в различных базисах?
20. Какой вид имеет характеристическое уравнение линейного оператора?
21. Что называется собственным значением и собственным вектором линейного оператора?
22. Как связаны между собой собственные значения и корни характеристического уравнения линейного оператора?
23. Что называется рангом и дефектом линейного оператора?
24. Как связаны между собой ранг и дефект линейного оператора?

4 семестр

1. Что называется моделью системы аксиом?
2. Какая система аксиом называется независимой?
3. Какая алгебраическая операция называется сложением натуральных чисел?
4. Какая алгебраическая операция называется умножением натуральных чисел?
5. Что называется полугруппой, полукольцом?
6. Какое множество называется строго линейно упорядоченным? Вполне упорядоченным?

7. Какое полукольцо называется вполне упорядоченным полукольцом?
8. Сформулируйте обобщенный принцип математической индукции.
9. В каких случаях выполняются вычитание и деление натуральных чисел? Какими операциями они являются?
10. Какое кольцо называется кольцом целых чисел?
11. Какое кольцо называется строго линейно упорядоченным кольцом?
12. Что называется полем, его подполем?
13. Какое поле называется минимальным расширением кольца?
14. Какое поле называется полем рациональных чисел?
15. Какое поле называется строго линейно упорядоченным полем?
16. Какое поле называется плотным? Плотно ли поле рациональных чисел?
17. Какая десятичная дробь называется периодической? Всякое ли рациональное число представимо в виде периодической десятичной дроби?
18. Что называется системой действительных чисел по Кантору, Дедекинду, Коши?
19. Что называется телом кватернионов?
20. Какая алгебра называется алгеброй с делением конечного ранга?

8.4. Примеры тестов

1-й семестр

1.	Сколько подформул содержит формула $\overline{X \cup Y} \to ((\bar{Z} \cup Y) \to \bar{Z})$		
	2	7	6
2.	Определите, какие из указанных ниже пар формул равносильны: а) $X \to (Y \to Z)$ и $Y \to (X \to Z)$, б) $X \cup Y$ и $X \to \bar{Y}$, в) $\bar{X} \cap Y$ и $X \cup \bar{Y}$.		
	а)	б)	в)
3.	На каком из множеств A, B, C равносильны предикаты $P(x)$ = "x-простое число", $Q(x)$ = "x − нечетное число"		
	$A = \{2,4,5,6\}$	$B = \{3,4,5,6\}$	$C = \{6,7,9\}$
4.	На множестве $\{2,4,6,8,12,13\}$ заданы предикаты $P(x)$ = "x − простое число", $Q(x)$ = "x делится на4", $R(x)$ = "x делится на 8" . Укажите истинное высказывание:		
	A = "$P(x)$достаточное условие для $R(x)$"	B = "$R(x)$ необходимое условие для$Q(x)$"	C = "$R(x)$ достаточное условие для $Q(x)$"
5.	Пусть заданы множества A и B. Элементами какого множества являются общие элементы множеств A и B?		
	объединения $A \cup B$	пересечения $A \cap B$	разности $A \setminus B$
6.	Пусть во множестве A n элементов. Сколько элементов в булеане 2^A множества A?		
	$n!$	n^2	2^n
7.	Пусть заданы множества $A = \{1, 2, 4\}$ и $B = \{a, b\}$. Какое из следующих множеств является декартовым произведением $B \times A$?		
	$\{1, 2, 4, a, b\}$	$\{a, 2a, 4a, b, 2b, 4b\}$	$\{(a, 1), (a, 2), (a, 4), (b, 1), (b, 2), (b, 4)\}$
8.	Пусть на множестве $A = \{1, 2, 5\}$ задано бинарное отношение $\beta = \{(1, 1), (1, 2), (2, 5), (5, 1)\}$. Какое из следующих бинарных отношений является дополнением $\overline{\beta}$ бинарного отношения β?		
	$\{(1, 5), (2, 1), (2, 2), (5, 2), (5, 5)\}$	$\{(1, 5), (2, 1), (5, 2)\}$	$\{(1, 1), (2, 1), (5, 2), (1, 5)\}$

<table>
<tr><td rowspan="2">9.</td><td colspan="3">Какое из следующих бинарных отношений, заданных на множестве $B = \{b, c, d, f\}$ является отношением эквивалентности?</td></tr>
<tr><td>$\{(b, b), (c, c), (d, d), (f, f)\}$</td><td>$\{(b, b), (c, c), (d, d), (f, f), (b, c)\}$</td><td>$\{(b, c), (c, b), (d, f), (d, f)\}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">10.</td><td colspan="3">Какое из следующих бинарных отношений, заданных на множестве $C = \{a, b, c\}$ является отношением нестрогого линейного порядка на C?</td></tr>
<tr><td>$\{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (a, c)\}$</td><td>$\{(a, a), (b, c), (a, c)\}$</td><td>$\{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, c), (a, c)\}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">11.</td><td colspan="3">Какое из следующих отображений является биективным?</td></tr>
<tr><td>$f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N};\ f(n) = 2n - 1$</td><td>$f\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{N};\ f(z) = 2z - 1$</td><td>$f\colon \mathbf{N} \to K$, K – множество нечётных натуральных чисел; $f(n) = 2n - 1$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">12.</td><td colspan="3">Чему равно произведение $\tau_1\tau_2$ подстановок $\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ и $\tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$?</td></tr>
<tr><td>$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$</td><td>$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$</td><td>$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">13.</td><td colspan="3">Какие из следующих матриц можно складывать:
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?</td></tr>
<tr><td>A и B</td><td>A и C^T</td><td>B^T и C</td></tr>
<tr><td rowspan="2">14.</td><td colspan="3">Какая из следующих матриц является единичной?</td></tr>
<tr><td>$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$</td><td>$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$</td><td>$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">15.</td><td colspan="3">Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Какое из произведений матриц имеет смысл?</td></tr>
<tr><td>AB</td><td>BA</td><td>AC</td></tr>
<tr><td rowspan="2">16.</td><td colspan="3">Какие из следующих матриц
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
являются делителями нуля?</td></tr>
<tr><td>A и B</td><td>A и C</td><td>B и C</td></tr>
<tr><td rowspan="2">17.</td><td colspan="3">Какое из следующих произведений не является членом определителя 5-го порядка?</td></tr>
<tr><td>$a_{21}a_{12}a_{34}a_{43}a_{55}$</td><td>$a_{21}a_{12}a_{34}a_{41}a_{55}$</td><td>$a_{41}a_{12}a_{34}a_{23}a_{55}$</td></tr>
<tr><td>18.</td><td colspan="3">Каков знак данного члена определителя $a_{21}a_{12}a_{55}a_{34}a_{43}$ пятого порядка?</td></tr>
</table>

	положительный	отрицательный	Данное произведение не является членом определителя.
19.	Установите соответствие между определителями и их значениями. 1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix}$; 3. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$; 4. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.		
	□ 0; □ 6; □ –6; □ 12; □ –12.		
20.	Какая матрица является обратной к матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$?		
	$\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -7 & -5 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$
21.	Дана система линейных уравнений: $\begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ 3x + 2y - 3z = 0 \\ x + 3y - 4z = 4 \end{cases}$ Тогда матричная форма записи этой системы имеет вид…		
	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$
22.	Для какой из следующих систем применимо правило Крамера?		
	$\begin{cases} 2x + 4y = 1 \\ 3x + 6y = 2 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + 3y = 4 \\ 3x + 6y = 2 \end{cases}$
23.	Выберите число, которое является симметричным элементом для (–2) в $\langle \mathbf{Q}^*, \cdot \rangle$.		
	–2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
24.	Какое из следующих подмножеств является подкольцом кольца $\langle \mathbf{Z}, +, \cdot \rangle$?		
	Множество чётных чисел	Множество нечётных чисел	Натуральные числа

2-й семестр

1.	Чему равна действительная часть комплексного числа $(2 + 4i)^2 - 5i$?

	–12	4	20
2.	Чему равен модуль числа –3 – 4i?		
	5	25	–7
3.	Сколько первообразных корней в группе корней 8 степени из 1?		
	8	4	5
4.	Какие из следующих алгебраических систем являются линейными пространствами: 1. $\langle \mathbf{Z}, +, \cdot, \mathbf{Q}\rangle$; 2. $\langle \mathbf{Q}, +, \cdot, \mathbf{R}\rangle$; 3. $\langle \mathbf{R}, +, \cdot, \mathbf{Q}\rangle$?		
	1.	2.	3.
5.	Какая система является базисом линейного пространства $\langle \mathbf{R}^2, +, \cdot, \mathbf{R}\rangle$?		
	{(1, 2), (0, 0)}	{(1, 2), (–3, –6)}	{(1, 2), (2, 3)}
6.	Какие координаты имеет вектор (1, 2) в базисе {(1, 0), (1, 1)}?		
	(1, 2)	(–1, 2)	(1, 1)
7.	Чему равен ранг данной системы векторов {(1, 0, 2), (0, 0, 0), (5, 0, 10), (1, 2, 3)}?		
	1	2	3
8.	Какое из подмножеств является линейным подпространством пространства $\langle \mathbf{R}, +, \cdot, \mathbf{Q}\rangle$?		
	Z	**Q**	$\mathbf{R}^+$
9.	Какая из матриц является матрицей ступенчатого вида?		
	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
10.	Какие переменные будут свободными в данной системе линейных уравнений $\begin{cases} x+y+z+t=3 \\ y+z+t=0 \end{cases}$?		
	x и y	z и t	y, z и t

3-й семестр

1.	Выберите многочлен, являющийся разностью многочленов: $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x$ и $g(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4$.		
	$-6x^2 - 4x - 4$	$6x^2 - 4x - 4$	$3x^2 - 4x - 4$
2.	Какие из многочленов $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $g(x) = x^3 - 2x^2 + x$, $h(x) = -3x^2 + 6x - 3$ являются ассоциированными?		
	$f(x)$ и $g(x)$	$f(x)$ и $h(x)$	$g(x)$ и $h(x)$
3.	Какую степень имеет многочлен $0\cdot x^5 - 2x^3 + 2x^2 + 5$?		

	пятую	четвёртую	третью
4.	В каком случае правильно проведено деление многочлена $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$ на многочлен $g(x) = x^2 - 2x + 2$ с остатком?		
	$f(x) = g(x)\cdot x - x$	$f(x) = g(x)\cdot(x - 1) + x$	$f(x) = g(x)\cdot x - 1$
5.	Какой многочлен является НОДом многочленов $f(x) = x^4 + x^3 + 4x^2 + 5x - 5$ и $g(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 10$?		
	$x - 2$	$5x^2 + 25$	$x^2 + 5$
6.	Какое разложение многочлена $f(x) = x^4 + 1$ является каноническим над полем **R**?		
	$(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$	$(x^2 - 1)(x^2 + 1)$	такого разложения нет
7.	Какой кратности является корень с=2 у многочлена $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$?		
	2	4	3
8.	Какова наименьшая степень многочлена с действительными коэффициентами, имеющего простой корень i и двукратный корень $(1 - i)$		
	6	3	4
9.	Указать остальные корни многочлена $3x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 2$, если известно что $c = 1 + i$ - корень этого многочлена		
10.	Какие из следующих алгебраических систем являются линейными пространствами: 1. ⟨**Z**, +, ·, **Q**⟩; 2. ⟨**Q**, +, ·, **R**⟩; 3. ⟨**R**, +, ·, **Q**⟩?		
	1.	2.	3.
11.	Какая система является базисом линейного пространства $\langle \mathbf{R}^2, +, \cdot, \mathbf{R}\rangle$?		
	{(1, 2), (0, 0)}	{(1, 2), (–3, –6)}	{(1, 2), (2, 3)}
12.	Какие координаты имеет вектор (1, 2) в базисе {(1, 0), (1, 1)}?		
	(1, 2)	(–1, 2)	(1, 1)
13.	Чему равен ранг данной системы векторов {(1, 0, 2), (0, 0, 0), (5, 0, 10), (1, 2, 3)}?		
	1	2	3
14.	Какое из подмножеств является линейным подпространством пространства ⟨**R**, +, ·, **Q**⟩?		
	Z	**Q**	$\mathbf{R}^+$
15.	Какое из следующих отображений является линейным оператором пространства $\langle \mathbf{R}^2, +, \cdot, \mathbf{R}\rangle$ в себя?		
	$\varphi((x, y)) = (xy, y)$	$\varphi((x, y)) = (x + y, 2y)$	$\varphi((x, y)) = (0, y^2)$
16.	В базисе e_1, e_2, e_3 трёхмерного линейного пространства линейный оператор φзадан матрицей $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Если $x = e_1 - e_2 - e_3$ и $\varphi(x) = ae_1 + 3e_2 + e_3$, то a равно…		
	1	–1	5
17.	Линейный оператор φ, заданный на $\mathbf{R}^2$, отображает вектор (x_1, x_2) в вектор $(-x_2, x_1)$. Какая матрица является матрицей линейного оператора φ?		
	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

4 семестр

1.	В системе единицей является		
	1	-1	-2

2.	Для системы выполняются все аксиомы Пеано, кроме		
	первой	второй	третьей
3.	Сколько существует отношений линейного порядка на множестве из *n* элементов?		
4.	Какая из ниже указанных пар принадлежит к классу – эквивалентных пар натуральных чисел?		
	(6,4)	(5,5)	(8,10)
5.	В какое рациональное число обращается периодическая дробь 0,8(43)?		
6.	Какое свойство теряется при переходе от поля R – действительных чисел к полю C – комплексных чисел?		
	коммутативность умножения	упорядоченность	ассоциативность умножения
7.	Какое свойство сохраняется при переходе от поля C к телу кватернионов		
	коммутативность умножения	упорядоченность	Обратимость умножения
8.	Чему равно произведение кватернионов		
9.	Найти частное кватернионов из задания 8		

8.5. Перечень вопросов для промежуточной аттестации (к экзамену):

Перечень вопросов к зачету (1-й семестр).

1. Логические операции над высказываниями.
2. Формулы алгебры высказываний и их классификация.
3. Теорема об основных равносильностях формул алгебры высказываний.
4. Предикаты и логические операции над ними.
5. Необходимые и достаточные условия.
6. Высказывания и теоремы стандартного вида.
7. Метод математической индукции.
8. Операции над множествами. Примеры, свойства.
9. Булеан множества. Теорема о количестве элементов в булеане конечного множества.
10. Виды бинарных соответствий, теорема о свойствах бинарных соответствий.
11. Отображения и их виды.
12. Признак обратимости отображения.
13. Бинарные отношения на множестве, их виды и признаки.
14. Отношение эквивалентности. Теорема о свойствах классов эквивалентности.
15. Сложение матриц, умножение матрицы на число, умножение матриц и их свойства.
16. Понятие и свойства транспонированной матрицы.
17. Перестановки и подстановки, их четность.
18. Теорема об изменении четности перестановки при транспозиции.
19. Теорема о расположении перестановок.
20. Определение члена определителя и его знака.
21. Определение определителя n-го порядка и вывод правил вычисления определителей 2-го и 3-го порядков.
22. Теорема о свойствах определителя.
23. Лемма об определителе Δ_{11}.
24. Теорема об алгебраическом дополнении.

25. Теорема о разложении определителя по элементам строки (столбца).
26. Теоремы замещения и аннулирования.
27. Обратная матрица и признак ее существования.
28. Решение систем линейных уравнений методом Крамера.
29. Алгебраические операции и их свойства.
30. Доказательство равносильности двух определений группы, примеры групп.
31. Кольцо, свойства кольца. Кольцо квадратных матриц порядка n и его свойства.
32. Линейное пространство, его примеры.

Перечень вопросов к экзамену (2 семестр)

1. Изоморфизм полей. Расширение полей.
2. Определение и признак поля комплексных чисел.
3. Операции над комплексными числами в алгебраической форме.
4. Тригонометрическая форма записи комплексных чисел.
5. Операции над комплексными числами в тригонометрической форме.
6. Теорема об извлечении корней n-степени из комплексного числа.
7. Теорема о способе получения корней n-степени из комплексного числа.
8. Группа корней n-степени из 1. Первообразные корни.
9. Первая и вторая формулы Муавра и их применение.
10. Теорема о поле упорядоченных пар действительных чисел.
11. Теорема о расширении поля R.
12. Теорема о модели поля комплексных чисел через упорядоченные пары действительных чисел.
13. Построение модели поля C через матрицы 2-го порядка.
14. Основная теорема о линейной зависимости системы и следствие из нее.
15. Базис системы векторов и его признак.
16. Теорема о существовании базиса системы векторов.
17. Ранг системы векторов и теорема о его свойствах.
18. Теорема о неизменяемости ранга системы векторов при ее элементарных преобразованиях.
19. Столбцевой и минорный ранги матрицы. Теорема об их совпадение.
20. Строчечный ранг матрицы и его совпадение со столбцевым рангом этой матрицы.
21. Матрица ступенчатого вида, теорема об ее ранге.
22. Теорема о приведении матрицы к матрице ступенчатого вида.
23. Критерий совместности системы линейных уравнений (с.л.у.).
24. Критерий определенности с.л.у.
25. Система ступенчатого вида. Приведение с.л.у. к системе ступенчатого вида.
26. Исследование и решение с.л.у. методом Гаусса.
27. Теорема о пространстве решений системы линейных однородных уравнений (с.л.о.у.)S_0.
28. Фундаментальная система решений (ф.с.р.) системы S_0 и теорема о ее существовании.
29. Теорема о количестве векторов в ф.с.р.
30. Теорема о связи между решениями неоднородной системы S и приведенной для нее системы S_0.

Перечень вопросов к экзамену (3 семестр)

1. Определение и примеры области целостности.
2. Трансцендентный элемент x над областью целостности K.
3. Определение кольца многочленов K[x] и его признак.
4. Теорема о единственности стандартной записи многочлена.
5. Теорема об обратимости многочлена в кольце P[x] (P – поле).
6. Теорема о свойствах делимости многочленов.
7. Теорема о возможности и единственности деления с остатком.
8. Теорема Безу и схема Горнера.
9. Теорема о единственности Н.О.Д и Н.О.К.
10. Последовательность Евклида и теорема о существовании и вычислении Н.О.Д.
11. Теорема о линейном представлении Н.О.Д.
12. Два признака взаимно-простых многочленов.
13. Теорема о свойствах взаимно-простых многочленов.
14. Теорема о свойствах неприводимых многочленов.
15. Теорема о разложении многочлена на неприводимые множители.
16. Теорема о вычислении Н.О.Д и Н.О.К многочленов с использованием их канонических разложений.
17. Корень многочлена, его признак. Кратность корня.
18. Первый признак кратности корня.
19. Второй признак кратности корня.
20. Теорема о числе корней многочлена.
21. Алгебраическое и функциональное равенство многочленов.
22. Две формулировки основной теоремы и следствие о числе корней многочлена над полем C.
23. Вывод формул Виета.
24. Теорема о неприводимых многочленах над полем R.
25. Определение и признак конечного базиса линейного пространства.
26. Теорема о количестве векторов в базисах конечномерного пространства.
27. Теорема о существовании линейного пространства размерности n.
28. Изоморфизм линейных пространств и его свойства.
29. Теорема об изоморфном образе базиса.
30. Теорема об изоморфизме конечномерных пространств.
31. Теорема о матрице перехода.
32. Линейные операторы, их примеры. Матрица линейного оператора.
33. Теорема о связи между матрицами линейного оператора в разных базисах.
34. Характеристическая матрица, уравнение линейного оператора.
35. Теорема о собственных значениях и собственных векторах линейного оператора

Перечень вопросов к экзамену (4 семестр)

1. Формулировка аксиоматики Пеано натурального ряда.
2. Доказательство независимости аксиом Пеано.
3. Определение сложения натуральных чисел и доказательство его единственности.
4. Теорема об ассоциативности сложения натуральных чисел.

5. Теорема о коммутативности сложения натуральных чисел.
6. Теорема о сократимости сложения натуральных чисел.
7. Лемма о слагаемом. Теорема о соотношениях натуральных чисел.
8. Теорема о методе математической индукции.
9. Умножение натуральных чисел и его единственность.
10. Теорема о дистрибутивности умножения натуральных чисел относительно их сложения.
11. Теорема о коммутативности умножения натуральных чисел.
12. Теорема об ассоциативности умножения натуральных чисел.
13. Теорема о сократимости умножения натуральных чисел.
14. Упорядоченность натуральных чисел, теорема о строгой линейной упорядоченности натуральных чисел.
15. Определение упорядоченного полукольца. Теорема об упорядоченном полукольце натуральных чисел.
16. Различные подходы к определению натурального вида.
17. Определение кольца целых чисел и его первый признак.
18. Второй признак кольца целых чисел.
19. Теорема о свойствах кольца целых чисел.
20. Теорема о с.л.у. кольца целых чисел и его архимедовости.
21. Определение и признак поля рациональных чисел Q.
22. Определение с.л.у. поля и его признак.
23. Теорема об упорядоченности поля Q.
24. Теорема о минимальности поля Q.
25. Теорема о плотности и архимедовости поля Q.
26. Три подхода к введению действительных чисел.
27. Определение, виды и примеры линейных алгебр.
28. Теорема о вложении поля P в алгебру V^P с единицей.
29. Теорема о существовании алгебры кватернионов.
30. Теорема Фробениуса.
31. Определение алгебры октав и теорема о ее альтернативности.
32. Обобщенная теорема Фробениуса.

8.6. Темы для написания курсовой работы

Не предусмотрено.

8.7. Формы контроля самостоятельной работы

Студенты сдают самостоятельную работу на консультациях.

Рабочая программа учебной дисциплины составлена в соответствии с учебным планом, федеральным государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование.

Рабочая программа учебной дисциплины составлена:
К.ф.-м.н., профессор кафедры математики,
теории и методики обучения математике ________________ А.И. Купцов

К.п.н., доцент кафедры математики,
теории и методики обучения математике ________________ В.Н. Ксенева

Рабочая программа учебной дисциплины утверждена на заседании кафедры математики, теории и методики обучения математике,
протокол №____ от «___» _________ 2014 г.

Зав. кафедрой ____________________ Э.Г. Гельфман

Рабочая программа учебной дисциплины одобрена методической комиссией физико-математического факультета
протокол №____ от «___» _________ 2014 г.

Председатель методической комиссии ______________ З.А. Скрипко